

DOI: 10.16285/j.rsm.2020.1429

红黏土土层锚杆界面剪切应力松弛试验及其模型

陈昌富^{1,2}, 杜 成^{1,2}, 朱世民^{1,2}, 何仕林^{1,2}, 张根宝³

(1. 湖南大学 建筑安全与节能教育部重点实验室, 湖南 长沙 410082; 2. 湖南大学 土木工程学院, 湖南 长沙 410082;
3. 湖南城市学院 土木工程学院, 湖南 益阳 413000)

摘 要: 锚-土界面剪切应力松弛是引起锚杆(索)预应力损失的关键因素。首先, 研制了锚-土界面剪切应力松弛试验装置; 然后, 针对红黏土锚固单元体试样, 分级施加恒定的界面剪切位移, 获得了锚-土界面剪切应力松弛全过程曲线, 并采用坐标平移法将分级加载曲线转化成分别加载曲线; 再引入分数阶微积分理论改进黏壶元件, 建立了红黏土-锚固体界面剪切分数阶 $M||N$ (由 Maxwell 体和 Newton 体并联组成) 松弛模型, 选取部分剪切位移水平下的松弛试验曲线回归分析得到了各模型参数, 同时还拟合得到了各模型参数随剪切位移的变化关系; 最后, 采用建立的松弛模型, 对另一部分剪切位移水平下的松弛曲线进行预测。研究结果表明: 相比于整数阶 $M||N$ 模型、Burgers 模型以及五元件模型 ($H||M||M$), 提出的分数阶 $M||N$ 松弛模型不仅具有结构简单、参数较少等优点, 也具备更高的拟合及预测精度。

关 键 词: 预应力锚杆; 红黏土; 锚-土界面; 应力松弛; 分数阶微积分; $M||N$ 模型

中图分类号: TU 470

文献标识码: A

文章编号: 1000-7598 (2021) 05-1201-09

Experimental study and model of interface shear stress relaxation behavior of anchors in red clay

CHEN Chang-fu^{1,2}, DU Cheng^{1,2}, ZHU Shi-min^{1,2}, HE Shi-lin^{1,2}, ZHANG Gen-bao³

(1. Key Laboratory of Building Safety and Energy Efficiency of Ministry of Education, Hunan University, Changsha, Hunan 410082, China;
2. College of Civil Engineering, Hunan University, Changsha, Hunan 410082, China;
3. College of Civil Engineering, Hunan City University, Yiyang, Hunan 413000, China)

Abstract: The shear stress relaxation of the anchor-soil interface is the key factor causing the prestress loss of anchor rod (cable). Firstly, a device for testing the shear stress relaxation of the anchor-soil interface was developed. Secondly, a constant interface shear displacement was applied in stages to the red clay anchored element sample, and the whole process of shear stress relaxation curve of anchor-soil interface was obtained, which can be transformed to the relaxation curve at each specific loading level by using coordinate translation method. Then, the theory of fractional calculus was introduced to improve the viscous pot element, and established the red clay-anchor solid interface shear fractional $M||N$ (composed of Maxwell body and Newton body in parallel) relaxation model. The model parameters were yielded by regression analysis of relaxation test curves under partial shear displacements, and the relationship between the model parameters and the shear displacements was also obtained by fitting. Finally, the established fractional $M||N$ relaxation model was applied to predict another part of the relaxation curve under shear displacement level. By comparing the integer-order $M||N$ model, the Burgers model and the five-element model ($H||M||M$), the results indicate that the proposed fractional $M||N$ relaxation model not only has the advantages of simple structure and fewer parameters, but also has higher fitting and prediction accuracy.

Keywords: prestressed anchor; red clay; anchor-soil interface; stress relaxation; fractional calculus; $M||N$ model

1 引 言

预应力锚杆因具有适应性强、性价比高、施工方便及加固效果好等特点, 被广泛应用于岩土工程

的加固与支护。大量工程实践表明, 预应力锚杆(索)都会产生不同程度的蠕变和应力松弛, 而且锚固体-岩土体界面的剪切蠕变和应力松弛是锚杆(索)产生蠕变和预应力损失的重要因素。

收稿日期: 2020-09-21

修回日期: 2020-12-21

基金项目: 国家自然科学基金项目 (No. 41572298; No. 51978254); 湖南省自然科学基金项目 (No. 2020JJ5024)。

This work was supported by the National Natural Science Foundation of China (41572298; 51978254) and the Natural Science Foundation of Hunan Province, China (2020JJ5024).

(C)1994-2021 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

第一作者简介: 陈昌富, 男, 1963年生, 博士, 教授, 主要从事边坡工程及支护工程、地基处理等方面的研究工作。E-mail: cfchen@163.com

目前,已有不少学者针对锚固体-岩土体界面的剪切蠕变特性进行了研究。比如,许宏发等^[1-2]开展了现场土层灌浆锚杆拉拔蠕变试验,分别采用 H-K 模型和 Burgers 模型建立了锚-土界面剪切蠕变模型; Kim^[3]开展了土层灌浆锚杆的蠕变试验和应力松弛试验,分析了锚杆的蠕变速率和应力损失;陈昌富等^[4]基于锚固单元体蠕变试验结果,建立了锚-土界面经验蠕变模型,其拟合与预测效果良好。

对于岩土体的松弛现象,国内外学者开展岩土体的应力松弛试验研究^[5-12],并建立了各种松弛模型,主要有经验模型^[8-9]和元件模型^[10-12]两大类。但针对锚固体-岩土体界面的剪切应力松弛试验与模型研究成果,目前还未见文献报道。因此,有必要开展岩土体-锚固体界面的剪切应力松弛模型研究,以便真实、全面地反映土层锚杆的时效特性。

传统的元件松弛模型大多为整数阶模型。由于整数阶模型描述非线性问题时适应性差,精度较低,于是近年来不少学者引入分数阶微积分理论^[13]来建立岩土体的蠕变模型^[14-17]和松弛模型^[18-20],以及锚固体-土体界面的蠕变模型^[21]。但目前尚未见采

用分数阶微积分理论建立锚固体-岩土体界面剪切应力松弛模型的文献报道。

为此,本文首先通过自主研发锚-土界面剪切应力松弛特性试验装置,针对红黏土锚固单元体试样,分级施加恒定的界面剪切位移,获得锚-土界面剪切应力松弛曲线;然后,引入分数阶导数理论,建立出锚-土界面的非线性三元件分数阶 M|N (由 Maxwell 体和 Newton 体并联组成)松弛模型;最后,对松弛试验曲线进行拟合及预测,以验证模型的有效性。

2 红黏土-锚固体界面剪切应力松弛试验

2.1 试验材料

试验所用土料取自湖南省祁东县某边坡开挖现场,为衡阳盆地的典型红黏土。土的物理力学性质指标如表 1 所示,颗粒级配曲线如图 1 所示。试验所用土料的不均匀系数 $C_u = 15.0$, 曲率系数 $C_c = 1.29$, 属于级配良好。原状土的压缩模量 $E_s = 2.77 \text{ MPa}$, 表明其压缩性较强,属于高压缩性土。

表 1 试验土料的物理力学性质指标
Table 1 Physical and mechanical properties of test soil

土体相对密度 G_s	液限 w_L / %	塑限 w_p / %	塑性指数 I_p	最优含水率 w_{op} / %	最大干密度 $\rho_{d,max}$ / (g · cm ⁻³)	不均匀系数 C_u	曲率系数 C_c	压缩模量 E_s / MPa
2.693	57.3	33.8	23.5	25.5	1.58	15.0	1.29	2.77

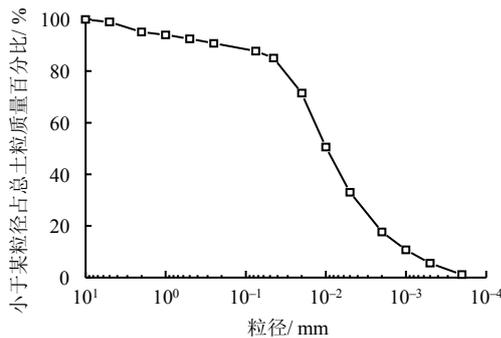


图 1 试验所用土料的颗粒级配曲线
Fig.1 Gradation curve of soil material used in test

采用水泥砂浆制作锚杆锚固体,其配合比为:水:砂:水泥=0.45:1:1,水泥为 P.O 42.5 级普通硅酸盐水泥。

2.2 试验装置及试验方法

图 2 为自行研制的锚-土界面剪切应力松弛试验装置,包括加载系统和量测系统。加载系统为特制的涡轮丝杆升降机。量测系统包括力传感器、位移传感器和数据采集系统。加载时,以固定速率转

动涡轮丝杆升降机的加载手柄,使丝杆缓慢地上升,进而依次带动力传感器以及锚固体上升。力传感器量测锚杆锚头处拉力的变化情况,并通过数据采集系统进行实时监测。

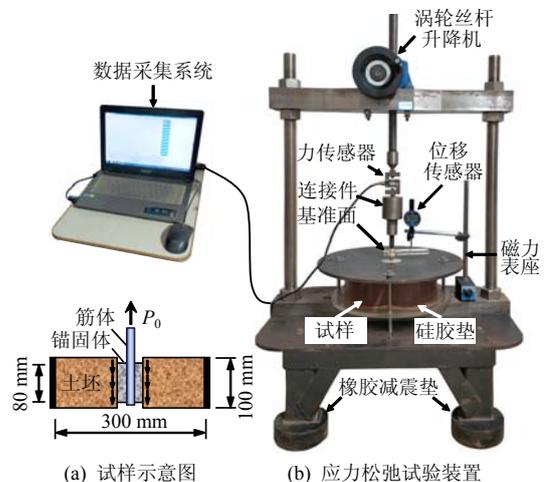


图 2 锚-土界面剪切应力松弛测试系统
Fig.2 Anchor-soil interface shear stress relaxation test system

参照文献[22-23]设计制作试样，共制作 2 组，每组 3 个试样，其中 2 个用来做瞬时拉拔，1 个用来做松弛试验。试样直径 $D = 300 \text{ mm}$ 、高度 $H = 100 \text{ mm}$ ，锚固段长度 $L = 80 \text{ mm}$ ，锚孔直径 $d = 48 \text{ mm}$ 。试样锚固长度与锚孔直径之比 $L/d = 1.67 < 4$ ，认为锚-土界面剪切应力分布均匀，可用锚固单元体试验结果来模拟现场锚杆锚固段上一个微元体[24]。另外，试样直径与锚孔直径之比 $D/d = 6.25 > 5$ ，所以边界效应对试验结果的影响可忽略[25]。每组试样的含水率 w 与干密度 ρ_d 为：A1 组， $w = 28\%$ ， $\rho_d = 1.2 \text{ g/cm}^3$ ；A2 组， $w = 28\%$ ， $\rho_d = 1.3 \text{ g/cm}^3$ 。

试验流程包括土坯制作、钻孔、灌浆养护以及松弛加载等。具体步骤如下：

(1) 土坯制作。将事先配置好的红黏土等分 5 份倒入制样模具中，并按控制干密度的方式进行分层击实，每层的击实高度均为 2 cm 。

(2) 钻孔。采用文献[23]提出的螺旋干钻法成孔装置在土坯中央钻孔，以 2 cm/min 的速率向下钻土，钻穿土坯后，回转钻杆，提出钻头，即可得到锚孔。

(3) 灌浆养护。先将 $\phi 16 \text{ mm}$ 螺纹钢筋安置在锚孔中心；再将配制好的水泥砂浆灌入锚孔并振捣密实；待水泥砂浆初凝后，将试样密封养护 28 d 。

(4) 松弛加载。应力松弛试验采用分级加载方式，分为 5~6 级，每级施加恒定的界面剪切位移，其值大小依据各组瞬时拉拔的试验结果确定。加载时，以固定速率转动涡轮丝杆升降机的加载手柄，使丝杆缓慢地上升，进而依次带动采用螺纹固定连接的力传感器和试样锚固体上升。本文应力松弛稳定标准为：连续 24 h 以内，应力变化值小于 1% [5]。前期试验结果表明，对于红黏土锚固单元体试样，荷载施加 5 d 后均能够达到该标准。因此，本文将每级荷载的施加时间统一设定为 5 d 。

2.3 试验结果及处理方法

通过松弛试验得到红黏土-锚固体界面剪切应力松弛分级加载全过程曲线，如图 3 所示。

蠕变和应力松弛是材料长期力学性质的两种理想化的力学概念，它们的微观机制都是由岩土结构调整引起的。蠕变有外界能量源向受力系统供给能量，而应力松弛并无在时间过程中外界力源的能量消耗，它只是由于土颗粒间结构弱化而引起内部应力降低[26]。对于蠕变试验，后一级加载产生的变形量是包括前面各级加载产生蠕变变形，在数据处理时应考虑前期加载历史的影响，采用非线性“陈氏加载法”[27]处理比较合适。而松弛试验，在施加每

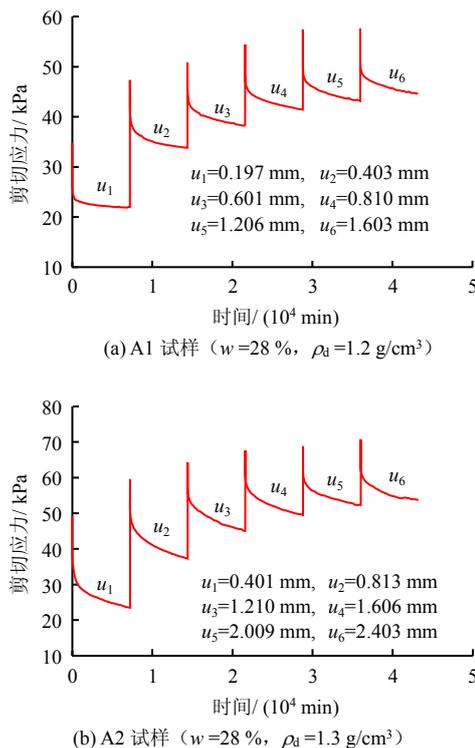


图 3 红黏土-锚固体界面剪切应力松弛分级加载曲线
Fig.3 Shear stress relaxation stepped loading curves of red clay-anchor solid interface

一级恒定应变时，会经历加荷阶段和卸荷阶段，其应力-应变路径会形成一个滞回圈。相对于蠕变试验而言，应力松弛施加的前一级荷载几乎不会影响后一级加载试样的受力状态。因此，采用“坐标平移法”[5]对分级加载松弛曲线进行处理更加合理。将图 3 分级加载曲线转化成分别加载曲线，如图 4 所示。

由图 4 可知，锚-土界面剪切应力在初始时刻下降非常快，其值大小随着时间增加持续减弱，最终趋近稳定。

3 基于分数阶导数的红黏土-锚固体界面剪切应力松弛模型

3.1 单级位移水平下分数阶 $M||N$ 松弛模型

分数阶微积分可以描述复杂的时效力学过程，刻画时间上的记忆性和空间上的路径依赖性。目前，分数阶微积分的定义有多种形式[13]，本文采用应用较为广泛的 Riemann-Liouville 型分数阶微积分算子理论。对于函数 $f(t)$ 的分数阶微积分定义为

$$\frac{d^\beta f(t)}{dt^\beta} = {}_{t_0} D_t^\beta f(t) = \frac{d^n}{dt^n} \int_{t_0}^t \frac{(t-p)^{n-\beta-1}}{\Gamma(n-\beta)} f(p) dp \quad (1)$$

式中： p 为模型变量； t 为时间； t_0 为初始时间； β 为分数阶微分的阶数， $\beta > 0$ ，且 $n-1 < \beta < n$ (n

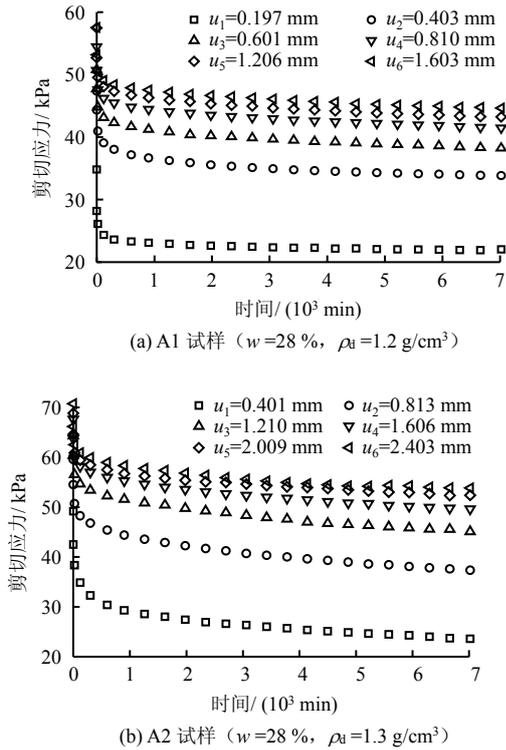


图4 分别加载剪切松弛曲线
Fig.4 Shear relaxation separate loading curves

为正整数); ${}_t D_t^\beta$ 是在 $[t_0, t]$ 上的 β 阶分数阶微积分; $\Gamma(\cdot)$ 为 Gamma 函数, 其定义为

$$\Gamma(\beta) = \int_0^\infty e^{-t} t^{\beta-1} dt \quad (\text{Re}(\beta) > 0) \quad (2)$$

当 $0 \leq \beta < 1$ 时, Riemann-Liouville 型分数阶微积分算子的拉普拉斯变换公式为

$$\left. \begin{aligned} L \{ {}_0 D_t^\beta f(t); s \} &= s^\beta F(s) \\ L \{ {}_0 D_t^{-\beta} f(t); s \} &= s^{-\beta} F(s) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

式中: s 为变换参数; $F(s)$ 为 $f(t)$ 的拉普拉斯变换。

对基于 Riemann-Liouville 型分数阶微积分理论的软体元件, 其本构方程为

$$\tau(t) = \xi \frac{d^\beta u(t)}{dt^\beta} \quad (4)$$

式中: $\tau(t)$ 为剪切应力; $u(t)$ 为位移; ξ 为黏滞系数相似的参数, 本文称为类黏滞系数。

当 $\beta = 0$ 时, 令 $\xi = E$, E 为弹性模量, 则式 (4) 所描述的是弹性固体; 当 $\beta = 1$ 时, 令 $\xi = \eta$, η 为黏滞系数, 与材料的本身黏性有关, 则式 (4) 所表示的是牛顿黏体。一般情况下, 当 $0 < \beta < 1$ 时, 软体元件所描述的是介于理想的牛顿黏体和弹性固体之间的黏-弹体, 即软体。

现象。基于 Riemann-Liouville 型分数阶微积分理论, 对式 (4) 进行 Laplace 变换和 Laplace 逆变换, 可得到软体元件的松弛方程为

$$\tau(t) = \xi \frac{t^{-\beta}}{\Gamma(1-\beta)} u \quad (5)$$

式中: u 为位移。

本文通过并联 Maxwell 体和 Newton 体 (即 M||N 模型), 再引入分数阶微积分理论改进黏壶元件, 建立了红黏土-锚固体界面剪切三元分数阶 M||N 松弛模型, 如图 5 所示。

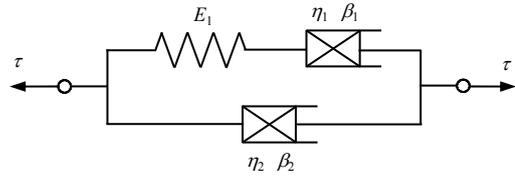


图5 分数阶 M||N 松弛模型
Fig.5 Fractional M||N relaxation model

$$\tau = \tau_M + \tau_N, \quad u = u_M = u_N \quad (6)$$

$$\tau_M = \frac{E_1 \eta_1 D_1}{E_1 + \eta_1 D_1} u_M, \quad \tau_N = \eta_2 D_2 u_N \quad (7)$$

式中: τ 为剪切应力; τ_M 和 u_M 分别为分数阶 Maxwell 体的应力和位移; τ_N 和 u_N 分别为分数阶软体元件的应力和位移; E_1 为弹簧的弹性模量; η_1 和 η_2 均为类黏滞系数; D_1 和 D_2 均为分数阶算子, $D_1 = \frac{d^{\beta_1}}{dt^{\beta_1}}$, $D_2 = \frac{d^{\beta_2}}{dt^{\beta_2}}$; β_1 和 β_2 均为分数阶微分阶数。

联立上述方程, 可得分数阶本构方程为

$$\tau = \left(\frac{E_1 \eta_1 D_1}{E_1 + \eta_1 D_1} + \eta_2 D_2 \right) u \quad (8)$$

对式 (8) 进行拉普拉斯变换, 令 $u(t) = u_0 H(t)$, $H(t)$ 为 Heaviside 单位阶跃函数, 则剪切应力表达式为

$$\tau = L^{-1} \left[\left(\frac{E_1 \eta_1 s^{\beta_1}}{E_1 + \eta_1 s^{\beta_1}} + \eta_2 s^{\beta_2} \right) \frac{u_0}{s} \right] \quad (9)$$

式中: u_0 为初始位移, 即为 $t = 0$ 时施加的位移, $u_0 = u(t)|_{t=0}$ 在应力松弛过程中为一恒定值, 则应力松弛方程为

$$\tau(t) = G(t) \cdot u_0 \quad (10)$$

式中: $G(t)$ 为松弛模量。根据式 (9) 可得松弛模量的拉普拉斯变换式为

$$G(t) = L^{-1} \left[\left(\frac{E_1 \eta_1 s^{\beta_1}}{E_1 + \eta_1 s^{\beta_1}} + \eta_2 s^{\beta_2} \right) \frac{1}{s} \right] = L^{-1} \left[E_1 \frac{\eta_1 s^{\beta_1 - 1}}{s^{\beta_1} + \frac{E_1}{\eta_1}} + \eta_2 s^{\beta_2 - 1} \right] \quad (11)$$

为了得到式(11)的拉普拉斯逆变换,对式(11)中第 1 项引入 Mittag-Leffler (简称 M-L) 函数来完成,第 2 项直接进行拉普拉斯变换和逆变换。其中,广义 M-L 函数定义如下^[13]:

$$E_{\alpha, \gamma}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \gamma)} \quad (\alpha, \gamma > 0; z \in C) \quad (12)$$

式中: α 、 γ 、 k 分别均为模型参数; z 为自变量; C 为复数集合。

M-L 函数的拉普拉斯变换为

$$\int_0^{\infty} e^{-st} t^{\alpha k + \gamma - 1} E_{\alpha, \gamma}^{(k)}(\pm nt^{\alpha}) dt = \frac{k! s^{\alpha - \gamma}}{(s^{\alpha} \mp n)^{k+1}} \quad (\text{Re}(s) > |n|^{\frac{1}{\alpha}}) \quad (13)$$

式中: $E_{\alpha, \gamma}^{(k)}(z) = \frac{d^k}{dz^k} E_{\alpha, \gamma}(z)$ 。

对比式(11)和式(13)可知,将式(13)第 1 项中各参数取为 $k=0$, $\gamma=1$, $\alpha=\beta_1$ 时, $n=E_1/\eta_1$, 得到的松弛模量为

$$G(t) = E_1 E_{\beta_1, 1} \left(-\frac{E_1}{\eta_1} t^{\beta_1} \right) + \eta_2 \frac{t^{-\beta_2}}{\Gamma(1-\beta_2)} \quad (14)$$

于是,得到锚-土界面剪切应力松弛方程为

$$\tau(t) = G(t) u_0 = \left[E_1 E_{\beta_1, 1} \left(-\frac{E_1}{\eta_1} t^{\beta_1} \right) + \eta_2 \frac{t^{-\beta_2}}{\Gamma(1-\beta_2)} \right] u_0 \quad (15)$$

值得注意的是,式(15)中的弹性模量 E_1 、黏滞系数 η_1 、黏滞系数 η_2 、分数阶微分阶数 β_1 和分数阶微分阶数 β_2 为 5 个模型参数,其值可由试验结果回归分析得到。

3.2 考虑位移水平影响的分数阶 M|N 松弛模型

式(15)为各级位移水平下的松弛模型,其模型参数 E_1 、 η_1 、 β_1 、 η_2 和 β_2 是随着施加的位移 $u_i (i=1, 2, \dots, 6)$ 而变化的。因此,这些模型参数是位移 u 的函数。

根据瞬时拉拔曲线变化特征,分析出界面剪切刚度与位移水平近似呈指数变化趋势。同时,对红

黏土-锚固体界面剪切应力松弛曲线进行拟合,结果表明:式(15)中弹性模量 E_1 、黏滞系数 η_1 、黏滞系数 η_2 和分数阶微分阶数 β_1 与施加位移 u 呈指数变化关系,而分数阶微分阶数 β_2 随施加位移 u 基本保持不变,可认定为常量,选取其平均值来表示。此外,在施加每级位移水平时,将施加位移值达到设定值所对应的土-锚界面剪切应力定义为初始剪切应力 $\tau_0 = \tau(t)|_{t=0}$, 它也与施加位移水平 u 呈指数变化关系。于是,可建立如下所示考虑位移水平影响的红黏土-锚固体界面剪切分数阶 M|N 模型:

$$\left. \begin{aligned} \tau(t) &= \left[E_1 E_{\beta_1, 1} \left(-\frac{E_1}{\eta_1} t^{\beta_1} \right) + \eta_2 \frac{t^{-\beta_2}}{\Gamma(1-\beta_2)} \right] u \\ E_1 &= a_{E_1} \exp(b_{E_1} u) + c_{E_1} \\ \eta_1 &= a_{\eta_1} \exp(b_{\eta_1} u) + c_{\eta_1} \\ \beta_1 &= a_{\beta_1} \exp(b_{\beta_1} u) + c_{\beta_1} \\ \eta_2 &= a_{\eta_2} \exp(b_{\eta_2} u) + c_{\eta_2} \\ \beta_2 &= \text{const.} \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

式中: a_{E_1} 、 b_{E_1} 、 c_{E_1} 、 a_{η_1} 、 b_{η_1} 、 c_{η_1} 、 a_{β_1} 、 b_{β_1} 、 c_{β_1} 、 a_{η_2} 、 b_{η_2} 、 c_{η_2} 和 β_2 均为待定系数,由试验结果分析确定。

3.3 基于松弛试验结果的模型参数确定

下面以 2.3 节 A1 试样结果(图 4(a))为例,说明模型参数确定与模型建立的过程。

(1) 采用式(15)对图 4(a)所示的各级位移水平 $u_i (i=1, 2, \dots, 6)$ 下的松弛曲线进行拟合,如图 6 所示;由此,得到相应的模型参数值和相关系数 R^2 , 见表 2。可以看出,模型的拟合效果很好。

(2) 接下来,将模型参数 E_1 、 η_1 、 β_1 、 η_2 随施加位移 u 的变化关系绘制于图 7,再对它们进行回归分析,得出各模型参数随位移水平 u 变化的经验公式。于是,得到 A1 试样的红黏土-锚固体界面

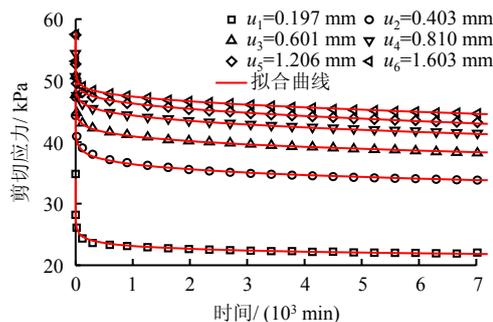


图 6 本文模型对 A1 试样的拟合曲线
Fig.6 Fitting effect of fractional M|N model on sample A1

表2 基于本文模型的 A1 试样松弛曲线拟合结果
Table 2 Fitting results of relaxation curve of A1 sample based on fractional M||N model

u / mm	τ_0 / kPa	E_1 / (kPa · mm ⁻¹)	η_1 / (kPa · min · mm ⁻¹)	β_1	η_2 / (kPa · min · mm ⁻¹)	β_2	R^2
0.197	34.830	99.24	4 337.5	0.159	53.22	0.10	0.987
0.403	47.344	81.92	17 546.2	0.351	27.91	0.10	0.991
0.601	50.805	61.56	50 824.2	0.464	18.38	0.10	0.990
0.810	54.450	49.96	76 404.2	0.539	13.39	0.10	0.992
1.206	57.466	35.05	144 980.0	0.648	8.87	0.10	0.991
1.603	57.557	26.94	218 729.9	0.694	6.55	0.10	0.995

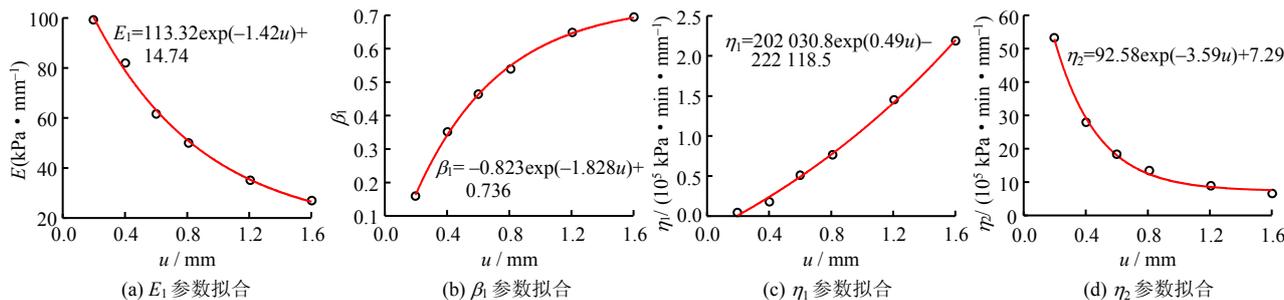


图7 A1 试样的松弛模型参数与界面剪切位移 u 关系

Fig.7 Relationships between relaxation model parameters of sample A1 and interface shear displacement u

剪切应力松弛模型:

$$\tau(t) = \left[E_1 E_{\beta_1, 1} \left(-\frac{E_1}{\eta_1} t^{\beta_1} \right) + \eta_2 \frac{t^{-\beta_2}}{\Gamma(1-\beta_2)} \right] u$$

$$\left. \begin{aligned} E_1 &= 113.32 \exp(-1.42u) + 14.74 \\ \eta_1 &= 202\ 030.8 \exp(0.49u) - 222\ 118.5 \\ \beta_1 &= -0.823 \exp(-1.828u) + 0.736 \\ \eta_2 &= 92.58 \exp(-3.59u) + 7.29 \\ \beta_2 &= 0.10 \end{aligned} \right\} (17)$$

按照上述的建模方法和步骤,对 A2 试样(图 4(b))中 u_1 、 u_2 、 u_4 和 u_6 对应的松弛曲线进行回归建模,可以得到 A2 试样的红黏土-锚固体界面剪切应力松弛模型:

$$\tau(t) = \left[E_1 E_{\beta_1, 1} \left(-\frac{E_1}{\eta_1} t^{\beta_1} \right) + \eta_2 \frac{t^{-\beta_2}}{\Gamma(1-\beta_2)} \right] u$$

$$\left. \begin{aligned} E_1 &= 120.18 \exp(-1.48u) + 20.33 \\ \eta_1 &= 37\ 368.1 \exp(0.54u) - 44\ 995.0 \\ \beta_1 &= -0.586 \exp(-0.880u) + 0.739 \\ \eta_2 &= 41.25 \exp(-1.89u) + 5.04 \\ \beta_2 &= 0.10 \end{aligned} \right\} (18)$$

拟合效果见图 8, 模型参数值与相关系数 R^2 ,

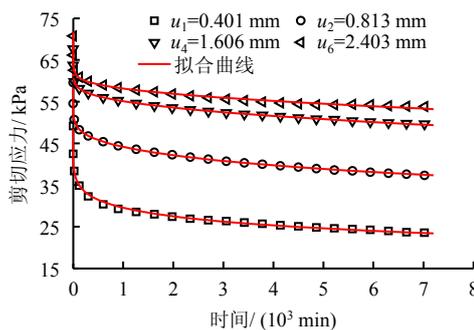


图8 本文模型对 A2 试样的拟合效果

Fig.8 Fitting effect of fractional M||N model on sample A2

4 分数阶模型与整数阶模型对比分析

下面将本文模型与几个整数阶模型进行对比分析,来证明本文模型的合理性与可靠性。整数阶模型分别为本文模型所对应的整数阶 M||N 模型、Burgers 模型和文献[18]中五元模型 (H||M||M)。

4.1 拟合效果分析

同样,以 2.3 节 A2 试样结果(图 4(b))为例,选用其中施加位移水平为 u_1 、 u_2 、 u_4 和 u_6 对应的松弛曲线进行回归建模,而将 u_3 和 u_5 对应的松弛曲线用作预测对比分析。按照 3.3 节所述的建模方法与步骤,可以分别得到整数阶 M||N 模型、Burgers 模型和五元模型 (H||M||M) 的红黏土-锚固体界面剪切应力松弛模型、拟合曲线、模型参数值和相关系数 R^2 。由于篇幅限制,这里只给出拟合曲线,如图 9 所示。

表 3 基于本文模型的 A2 试样松弛曲线拟合结果
Table 3 Fitting results of relaxation curve of sample A2 based on fractional M||N model

u / mm	τ_0 / kPa	E_1 / (kPa · mm ⁻¹)	η_1 / (kPa · min · mm ⁻¹)	β_1	η_2 / (kPa · min · mm ⁻¹)	β_2	R^2
0.401	49.166	87.64	2 338.8	0.324	24.38	0.10	0.995
0.813	59.569	54.71	11 924.4	0.461	13.83	0.10	1.000
1.606	67.631	32.48	43 149.6	0.587	7.16	0.10	0.998
2.403	70.740	22.29	91 104.3	0.673	5.39	0.10	0.992

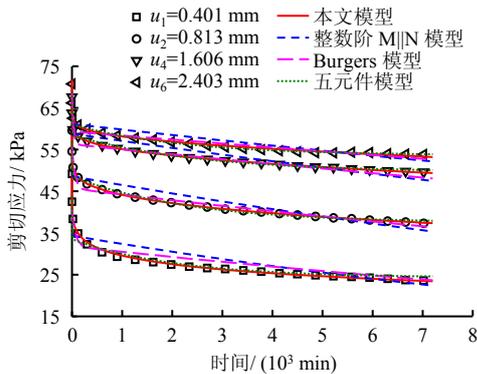


图 9 模型对 A2 试样的拟合
Fig.9 Model fitting of sample A2

从图 9 可以看出，整数阶 M||N 模型拟合精度最差，Burger 模型其次，五元件模型较好、本文模型拟合精度最好。虽然五元件模型拟合相关系数 R^2 较高，但模型拟合曲线与试验值仍有一定偏差，尤其是初始和拐点处的偏差较大。另外，在低剪切位移水平下，五元件模型拟合效果不如本文模型。

为了定量描述本文提出的非线性松弛模型在反映红黏土-锚固体界面剪切应力松弛特性的优越性，还给出了 A2 试样中位移水平分别为 u_1 、 u_2 、 u_4 和 u_6 的拟合和实测结果的均方差 (RMSE) 和相关系数 R^2 作为定量评价指标，结果见表 4。

由表 4 得出，本文模型拟合结果的 RMSE 最小，而 R^2 最大，说明本文提出的非线性松弛模型拟合效果优于整数阶 M||N 模型、Burgers 模型和五元件模型。分析表明，本文模型能够更好地反映红黏土-锚固体界面剪切应力松弛的全过程，拟合精度较高，模型较简单。

表 4 模型拟合精度评价
Table 4 Evaluation of model fitting accuracy

松弛模型	均方差 RMSE				相关系数 R^2			
	u_1	u_2	u_4	u_6	u_1	u_2	u_4	u_6
本文模型	0.413	0.539	0.175	0.360	0.995	0.989	0.998	0.992
整数阶 M N 模型	3.747	2.635	2.219	2.317	0.629	0.744	0.723	0.655
Burgers 模型	2.044	0.965	0.960	0.875	0.937	0.966	0.964	0.950
五元件模型	1.369	0.636	0.465	0.498	0.973	0.985	0.988	0.986

4.2 预测效果分析

对 2.3 节 A2 试样中界面剪切位移水平为 u_1 、 u_2 、 u_4 和 u_6 对应的松弛曲线进行回归分析，依次得到本文模型、整数阶 M||N 模型、Burgers 模型和五元件模型所对应松弛模型。接下来，对界面剪切位移水平为 u_3 和 u_5 下的松弛曲线进行预测，结果如图 10 所示。同样，对 A2 试样中 u_3 和 u_5 组的预测结果进行误差分析，结果如表 5 所示。

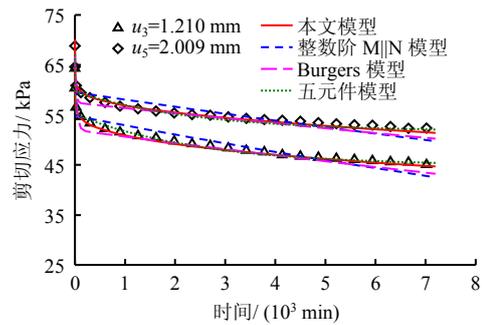


图 10 模型对 A2 试样的预测
Fig.10 Model prediction of sample A2

表 5 模型预测结果误差分析
Table 5 Error analysis of model prediction results

松弛模型	均方差 RMSE		相关系数 R^2	
	u_3	u_5	u_3	u_5
本文模型	0.457	0.490	0.990	0.983
整数阶 M N 模型	2.340	2.250	0.750	0.665
Burgers 模型	1.171	1.160	0.966	0.958
五元件模型	0.536	0.613	0.987	0.982

由图 10 可以直观地看出，本文模型的预测效果最好，其次为五元件模型，最后为 Burger 模型和整数阶 M||N 模型。虽然五元件模型与本文模型的预测效果相差不大，但该模型相比本文模型来说却更为复杂。此外，本文模型预测结果的 RMSE 最小， R^2 最大，这进一步说明了本文模型预测效果优于整数阶 M||N 模型、Burgers 模型和五元件模型。根据以上分析可知，本文建立的红黏土-锚固体界面剪切应力松弛模型不仅具有较好的拟合精度，而且具备较强的预测能力。

5 结 论

(1) 为了深入研究红黏土土层锚杆界面剪切应力松弛特性,自主研发了锚-土界面剪切应力松弛试验装置,针对红黏土锚固单元体试样,采用分级施加恒定界面剪切位移的方式,得到了红黏土-锚固体界面剪切应力松弛全过程曲线。

(2) 基于分数阶微积分理论,引入介于理想的牛顿黏体和弹性固体之间的软体元件,来代替传统的牛顿黏体,建立了一种新的红黏土-锚固体界面剪切应力松弛模型。构建的分数阶 $M||N$ 松弛模型,不仅模型简单,而且能够很好地拟合和预测各级位移水平下锚-土界面剪切应力松弛行为。

(3) 对比整数阶 $M||N$ 模型、Burgers 模型、五元件 ($H||M||M$) 模型和分数阶 $M||N$ 模型的拟合和预测结果,可以看出,本文建立的三元件分数阶 $M||N$ 松弛模型在描述锚-土界面剪切应力松弛特性方面,具备参数更少、精度更高,且便于实际工程应用的优越性。研究结果为红黏土土层锚杆在长期荷载作用下的应力松弛行为分析提供了理论基础。

参 考 文 献

- [1] 许宏发, 卢红标, 钱七虎. 土层灌浆锚杆的蠕变损伤特性研究[J]. 岩土工程学报, 2002, 24(1): 61-63.
XU Hong-fa, LU Hong-biao, QIAN Qi-hu. Creep damage effects of pulling grouting anchor in soil[J]. **Chinese Journal of Geotechnical Engineering**, 2002, 24(1): 61-63.
- [2] 许宏发, 孙远, 陈应才. 土层锚杆蠕变试验研究[J]. 工程勘察, 2006, (9): 6-8, 53.
XU Hong-fa, SUN Yuan, CHEN Ying-cai. Study on creep tests of soil anchors[J]. **Journal of Geotechnical Investigation & Surveying**, 2006, (9): 6-8, 53.
- [3] KIM N K. Performance of tension and compression anchors in weathered soil[J]. **Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering**, 2003, 129(12): 1138-1150.
- [4] 陈昌富, 刘俊斌, 徐优林, 等. 锚-土界面剪切蠕变试验及其经验模型研究[J]. 岩土工程学报, 2016, 38(10): 1762-1768.
CHEN Chang-fu, LIU Jun-bin, XU You-lin, et al. Tests on shearing creep of anchor-soil interface and its empirical model[J]. **Chinese Journal of Geotechnical Engineering**, 2016, 38(10): 1762-1768.
- [5] 孙钧. 岩土材料流变及其工程应用[M]. 北京: 中国建筑工业出版社, 1999.
SUN Jun. Rheological behavior of geomaterials and its engineering applications[M]. Beijing: China Architecture and Building Press, 1999.
- [6] SCHULZE O. Strengthening and stress relaxation of Opalinus clay[J]. **Physics and Chemistry of the Earth**, 2011, 36(17-18): 1891-1897.
- [7] WANG Z, GU L L, SHEN M R, et al. Shear stress relaxation behavior of rock discontinuities with different joint roughness coefficients and stress histories[J]. **Journal of Structural Geology**, 2019, 126: 272-285.
- [8] 王志俭, 殷坤龙, 简文星, 等. 万州安乐寺滑坡滑带土松弛试验研究[J]. 岩石力学与工程学报, 2008, 27(5): 931-937.
WANG Zhi-jian, YIN Kun-long, JIAN Wen-xing, et al. Experimental study on soil relaxation in Anlesi landslide zone of Wanzhou[J]. **Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering**, 2008, 27(5): 931-931.
- [9] 熊良宵, 杨林德, 张尧. 绿片岩多轴受压应力松弛试验研究[J]. 岩土工程学报, 2010, 32(8): 1158-1165.
XIONG Liang-xiao, YANG Lin-de, ZHANG Yao. Stress relaxation tests on green schist specimens under multi-axial compression[J]. **Chinese Journal of Geotechnical Engineering**, 2010, 32(8): 1158-1165.
- [10] 田洪铭, 陈卫忠, 肖正龙, 等. 泥质粉砂岩高围压三轴压缩松弛试验研究[J]. 岩土工程学报, 2015, 37(8): 1433-1439.
TIAN Hong-ming, CHEN Wei-zhong, XIAO Zheng-long, et al. Experimental study on triaxial compression relaxation of argillaceous siltstone with high confining pressure[J]. **Chinese Journal of Geotechnical Engineering**, 2015, 37(8): 1433-1439.
- [11] 赵振华, 张晓君, 李晓程. 含卸压孔硬岩应力松弛特性试验研究[J]. 岩土力学, 2019, 40(6): 2192-2199.
ZHAO Zhen-hua, ZHANG Xiao-jun, LI Xiao-cheng. Experimental study of stress relaxation characteristics of hard rocks with pressure relief hole[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2019, 40(6): 2192-2199.
- [12] YU H C, ZHANG X S, LIU H D, et al. Stress relaxation behavior of silty mudstone considering the effect of confining pressure[J]. **Environmental Earth Sciences**, 2016, 75(12): 1001.
- [13] 陈文. 力学与工程问题的分数阶导数建模[M]. 北京: 科学出版社, 2010.
CHEN Wen. Fractional derivative modeling of mechanical

- and engineering problems[M]. Beijing: Science Press, 2010.
- [14] 刘家顺, 靖洪文, 孟波, 等. 含水条件下弱胶结软岩蠕变特性及分数阶蠕变模型研究[J]. 岩土力学, 2020, 41(8): 2609-2618.
- LIU Jia-shun, JING Hong-wen, MENG Bo, et al. Research on the effect of moisture content on the creep behavior of weakly cemented soft rock and its fractional-order model[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2020, 41(8): 2609-2618.
- [15] WU F, LIU J F, WANG J. An improved Maxwell creep model for rock based on variable-order fractional derivatives[J]. **Environmental Earth Sciences**, 2015, 73(11): 6965-6971.
- [16] ZHOU H W, WANG C P, HAN B B, et al. A creep constitutive model for salt rock based on fractional derivatives[J]. **International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences**, 2011, 48(1): 116-121.
- [17] 罗庆姿, 陈晓平, 王盛, 等. 软黏土变形时效性的试验及经验模型研究[J]. 岩土力学, 2016, 37(1): 66-75.
- LUO Qing-zi, CHEN Xiao-ping, WANG Sheng, et al. Experimental and empirical model research on deformation timeliness of soft clay[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2016, 37(1): 66-75.
- [18] 于怀昌, 史广诚, 刘汉东, 等. 基于分数阶微积分的岩石非线性黏弹性应力松弛模型研究[J]. 应用基础与工程科学学报, 2019, 27(1): 194-204.
- YU Huai-chang, SHI Guang-cheng, LIU Han-dong, et al. Study on nonlinear viscoelastic stress relaxation model of rock based on fractional order calculus[J]. **Journal of Applied Foundation and Engineering Science**, 2019, 27(1): 194-204.
- [19] 张春晓, 肖宏彬, 包嘉邈, 等. 膨胀土应力松弛的分数阶模型[J]. 岩土力学, 2018, 39(5): 1747-1752.
- ZHANG Chun-xiao, XIAO Hong-bin, BAO Jia-miao, et al. Fractional order model of stress relaxation in expansive soil[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2018, 39(5): 1747-1752.
- [20] 汪明武, 徐新宇, 周天龙, 等. 网纹红土分数阶应力松弛模型[J]. 计算力学学报, 2020, 37(3): 362-367.
- WANG Ming-wu, XU Xin-yu, ZHOU Tian-long, et al. The fractional order relaxation model of net-like red soil[J]. **Chinese Journal of Computational Mechanics**, 2020, 37(3): 362-367.
- [21] 陈昌富, 高傑, 刘俊斌, 等. 基于分数阶导数的膨胀土锚固边坡土-锚界面蠕变模型[J]. 安全与环境学报, 2018, 18(5): 1847-1854.
- CHEN Chang-fu, GAO Jie, LIU Jun-bin, et al. A fractional-derivative-based creep model for the soil-anchor interface in the anchored slope with the soil expanding[J]. **Journal of Safety and Environment**, 2018, 18(5): 1847-1854.
- [22] 陈昌富, 梁冠亭, 汤宇, 等. 锚杆锚固体与土体界面特性室内测试新方法[J]. 岩土工程学报, 2015, 37(6): 1115-1122.
- CHEN Chang-fu, LIANG Guan-ting, TANG Yu, et al. Anchoring solid-soil interface behavior using a novel laboratory testing technique[J]. **Chinese Journal of Geotechnical Engineering**, 2015, 37(6): 1115-1122.
- [23] 温永凯, 陈昌富, 朱世民, 等. 基于钻孔式锚固单元体试样的锚-土界面剪切特性研究[J]. 中国科技论文, 2020, 15(8): 855-861.
- WEN Yong-kai, CHEN Chang-fu, ZHU Shi-min, et al. Experimental investigation on grout-soil interface shear behavior for grouted anchor in red clays based on drilled element anchor specimens[J]. **China Science Paper**, 2020, 15(8): 855-861.
- [24] BENMOKRANE B, CHENNOUF A, MITRI H S. Laboratory evaluation of cement-based grouts and grouted rock anchors[J]. **International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences & Geomechanics Abstracts**, 1995, 32(7): 633-642.
- [25] COOKE R W, PRICE G, TARR K. Jacked piles in London clay: a study of load transfer and settlement under working conditions[J]. **Géotechnique**, 1979, 29(2): 113-147.
- [26] 李军世. 黏土蠕变-应力松弛耦合效应的数值探讨[J]. 岩土力学, 2001, 22(3): 294-297.
- LI Jun-shi. Numerical discussion creep and stress on coupled effects of relaxation of clay[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2001, 22(3): 294-297.
- [27] TAN T K, KANG W F. Locked in stresses, creep and dilatancy of rocks, and constitutive equations[J]. **Rock Mechanics**, 1980, 13(1): 5-22.